

# Vitor Amadeu Souza

vitor@cerne-tec.com.br

## Introdução a Transformada de Laplace

### 1. Introdução

Este artigo visa apresentar um conteúdo prático demonstrando a funcionalidade da transformada de Laplace.

### 2. Quem foi Laplace?

Antes de mais nada, vamos conhecer quem foi Pierre Simon, ou Marques de Laplace através desta seção do trabalho. Ele foi um matemático e físico francês que organizou a astronomia matemática, resumindo e ampliando o trabalho de seus predecessores nos cinco volumes do seu *Mécanique Céleste* (Mecânica celeste) (1799-1825). Esta obra-prima traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica usada por Isaac Newton para um estudo baseado em cálculo, conhecido como mecânica física.

Ele também formulou a equação de Laplace. A transformada de Laplace aparece em todos os ramos da física matemática — campo em que teve um papel principal na formação. O operador diferencial de Laplace, da qual depende muito a matemática aplicada, também recebe seu nome.

Ele se tornou conde do Império em 1806 e foi nomeado marquês em 1817, depois da restauração dos Bourbons.

### 3. O que é Transformada de Laplace?

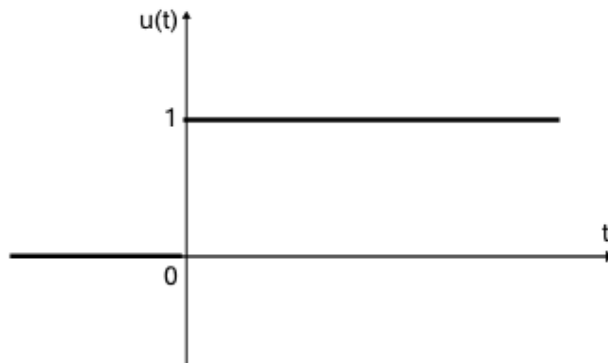
É definida por uma função  $f(t)$  definida para todo número real  $t \geq 0$  é a função  $F(s)$ , definida por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

As propriedades desta transformada tornam-na útil para a análise de sistemas dinâmicos lineares. A vantagem mais interessante desta transformada é que a integração e a derivação tornam-se multiplicações e divisões, da mesma maneira que o logaritmo transforma a multiplicação em adição. Ela permite levar a resolução de equações diferenciais à resolução de equações polinomiais, que são muito mais simples de resolver.

#### 4. Função Degrau Unitário

Observe a figura abaixo:



Podemos defini-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 \text{ para } t \geq 0 \\ u(t) &= 0 \text{ para } t < 0 \end{aligned}$$

$$L\{ u(t) \} = \int_{0 \dots \infty} e^{-s t} 1 dt = (-1/s) e^{-s t} \Big|_{0 \dots \infty} = 1 / s$$

Desta forma, podemos representar uma função degrau usando a transformada de Laplace por  $1/s$ . Na tabela abaixo está apresentada algumas transformadas de Laplace para algumas funções usuais:

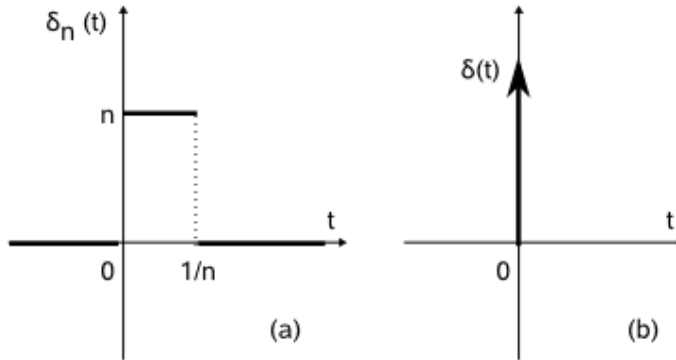
$f(t)$	$L\{ f(t) \}$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$
$\frac{t^n}{n!} e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^{n+1}}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \text{ sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \text{ cos } \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

## 5. Função Delta ou Função Impulso

Digamos que uma função seja definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\delta_n(t) &= n \text{ para } 0 \leq t < 1/n \\ \delta_n(t) &= 0 \text{ caso contrário}\end{aligned}$$

Graficamente esta função seria representada da seguinte forma:



Para qualquer  $n$ , pode ser facilmente deduzido que  $\int_{-\infty \dots +\infty} \delta_n(t) = n(1/n) = 1$ .

A função delta (ou função impulso) é dada pelo limite de  $\delta_n(t)$  quando  $n$  tende para infinito:

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t).$$

Podemos deduzir que:

$$\delta(t) = \infty \text{ para } t = 0$$

$$\delta(t) = 0 \text{ para } t \neq 0$$

## 6. Convergência e Divergência

Para sabermos se uma função diverge ou converge, devemos verificar se o resultado da mesma tende a infinito. Caso o resultado seja infinito, as funções divergem e caso contrário as mesmas convergem. Vejamos alguns exemplos afim de facilitar o assunto:

a)  $\int_1^{\infty} (1/t) dt$

Seja  $f(t) = 1/t$ ,  $t \geq 1$ , então converge?

$$\int_1^{\infty} f(t)dt = \int_1^{\infty} (1/t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A (1/t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$$

Logo esta integral diverge.

b) Seja  $f(t) = 1/t^2$ ,  $t \geq 2$ , então a integral  $\int_2^{\infty} f(t)dt$  *diverge?*

$$\int_2^{\infty} (1/t^2)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A (1/t^2)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} (-1/t \Big|_2^A) = 1/2$$

Logo podemos ver que esta integral converge para  $1/2$ .